Journal of Population Association of Iran, Vol. 17, No. 33, Spring & Summer 2022

Original Research Article

Adjustment and Coverage of Variance Projection Error: Application of Bayesian Inference in Mortality Projections

Mehdi Khalili[1]*, Mohammad Hadaddi[2], Farideh Shams-Ghahfarokhi[3], Samaneh Ranjbari-Beyvardi[4], Hasan Eini-Zinab[5]

Abstract

Models developed to project mortality are primarily based on extrapolative methods and to some extent researchers' subjective judgement. These models face the same challenge of detecting the inherent uncertainty in forecasting. This paper introduces Bayesian inference methods for mortality projections in response to such a problem and its methodological importance. As a developed country with an accurate registration system, the French mortality data was used to estimate and predict mortality rates from 1959 to 1999. Bayesian inference was used to estimate each parameter's posterior and prior distributions, and the Monte Carlo Markov chain algorithm was exploited to estimate the parameters. The findings of the research indicate that in Bayesian models, by examining the entire space of a parameter through probability distributions, a better estimate of a parameter values is obtained. A Bayesian model also has a wider confidence interval than the Lee-Carter model, covering a more significant part of errors and uncertainty in most age groups.

Keywords: Mortality, Uncertainty, The posterior and prior distributions, Bayesian inference, Lee-Carter model

Received: 2022-05-09 Accepted: 2022-12-06

[1] PhD Candidate in Demography, University of Tehran, Tehran, Iran (Corresponding Author); m.m.khalilii13@gmail.com

[2] PhD Candidate in Demography, University of Tehran, Tehran, Iran; Haddadi1741@ut.ac.ir

[3] PhD Candidate in Demography, Yazd University, Yazd, Iran; farideh.shams@stu.yazd.ac.ir

[4] PhD Candidate in Demography, University of Tehran, Tehran, Iran; Ranjbari.beyvardi@ut.ac.ir

[5] Associate Professor, Department of Community Nutrition, Shahid Beheshti University of Medical Science, Tehran, Iran; hassan.eini@sbmu.ac.ir

DOI: https://doi.org/10.22034/jpai.2023.553426.1227

■ **مقاله پژوهشی**

تعدیل و پوشش واریانس و خطای پیش‌بینی: کاربرد استنباط بیزی در پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر

مهدی خلیلی[۱]*، محمد حدادی[۲]، فریده شمس قهفرخی[۳]، سمانه رنجبری بیوردی[٤]، حسن عینی‌زیناب[٥]

چکیده

مدل‌های توسعه داده شده در پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر عمدتا مبتنی بر روش‌های برون‌یابی و شامل درجه‌ای از قضاوت ذهنی محققان است که چالش اصلی و مهم تمامی این مدل‌ها پوشش بهتر و دقیق‌تر عدم‌قطعیت ذاتی پیش‌بینی‌ها است. مقاله حاضر با تکیه بر چنین مشکلی و اهمیت روش‌شناختی آن به معرفی روش‌های نوظهور استنباط بیزی در پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر پرداخته است. به منظور ارزیابی و معرفی بهتر مدل، از داده‌های مرگ‌ومیر فرانسه به عنوان یک کشور توسعه‌یافته و دارای نظام ثبتی دقیق برای برآورد و پیش‌بینی میزان‌های مرگ‌ومیر از سال ۱۹۵۹ تا ۱۹۹۹ استفاده شده است. توزیع پسین و پیشین هر پارامتر از طریق استنباط بیزی و همچنین برآورد پارامترهای مختلف از طریق الگوریتم زنجیره مارکوف مونت‌کارلو برآورد شده است. یافته‌های تحقیق حاکی از آن است که در مدل‌های بیزین با بررسی تمام فضای یک پارامتر از طریق توزیع‌های احتمال تخمین بهتری از مقادیر پارامتر بدست می‌آید. همچنین در مقایسه با مدل اصلی لی-کارتر، در مدل بیزین بخش قابل‌توجهی از خطاها و عدم‌قطعیت ذاتی پیش‌بینی در گروه‌های سنی مختلف به‌نحو بهتر و دقیق‌تری پوشش داده می‌شود.

واژگان کلیدی: مرگ‌ومیر، عدم‌قطعیت، توزیع پسین و پیشین، استنباط بیزی، مدل لی و کارتر

تاریخ دریافت: ۱٤۰۱/۰۲/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱٤۰۱/۰۹/۲۹

۱ دانشجوی دکتری جمعیت‌شناسی، دانشگاه تهران، تهران، ایران (نویسنده مسئول)؛ m.m.khalilii13@gmail.com
۲ دانشجوی دکتری جمعیت‌شناسی، دانشگاه تهران، تهران، ایران؛ Haddadi1741@ut.ac.ir
۳ دانشجوی دکتری جمعیت‌شناسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران، farideh.shams@stu.yazd.ac.ir
٤ دانشجوی دکتری جمعیت‌شناسی، دانشگاه تهران، تهران، ایران؛ Ranjbari.beyvardi@ut.ac.ir
٥ دانشیار جمعیت‌شناسی دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی، تهران، ایران؛ hassan.eini@sbmu.ac.ir

DOI: https://doi.org/10.22034/jpai.2023.553426.1227

مقدمه و بیان مساله

بخش قابل‌توجهی از دقت پیش‌بینی‌های جمعیتی متکی بر یکی از سه مؤلفه اصلی تغییر در جمعیت‌شناسی یعنی مرگ‌ومیر است. از زمان انتشار کتاب گامپرتز[1] در سال ۱۸۲۵ در مورد قانون مرگ‌ومیر، بخش زیادی از ادبیات مربوط به پیش‌بینی در جمعیت‌شناسی، معطوف به چنین حوزه روشی شده است. قانون گامپرتز نشان‌دهنده یک تعیین‌کننده مهم، یعنی سن، در تغییرات نیروی مرگ بود؛ که براساس آن مرگ‌ومیر بزرگسالان در یک سن مشخص یک افزایش تقریبا نمایی دارد. تلاش‌هایی که در دهه‌های بعد با تکیه بر چنین قوانینی صورت گرفت، عمدتا منجر به مدل‌سازی‌های مختلفی از مرگ‌ومیر شد که هر یک براساس فرضیات مختلفی از آینده و روش‌شناسی‌های متفاوتی شکل گرفته است. با این وجود، برای مدت‌ها روش مسلط در برآوردها و پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر مبتنی بر جداول عمر و شامل قضاوت ذهنی متخصصان بوده است (Lee, 2012). برای مثال، بانک جهانی و سازمان ملل برای سال‌ها از روش‌های جدول عمر و جداول عمر مدل برای پیش‌بینی امید زندگی استفاده کرده‌اند (Pedroza, 2002).

تغییرات امید زندگی در سال‌های بعد از گذار جمعیتی و غیرخطی بودن این تغییرات اما، پیش‌بینی‌های متکی بر جدول عمر و نظر متخصصان را با چالش جدی مواجه کرد. بسیاری از روش‌هایی که در دهه‌های بعد بر پیش‌بینی مرگ‌ومیر متمرکز شده‌اند، تلاشی برای ایجاد مدل‌هایی بوده است که بتواند چنین تغییرات تاریخی و نوسانات امید زندگی را به‌نحو دقیق‌تری لحاظ کنند (Willekense, 2005). همچنین، روش‌های پیشنهادی که در سال‌های قبل توسعه داده شده‌اند، علاوه بر رفع مشکلات موجود برای مرتفع ساختن یک چالش روش‌شناختی مهم یعنی عدم‌قطعیت[2] در پیش‌بینی‌های جمعیتی شکل گرفته‌اند. برای حل این مشکل، از ابتدای گسترش روش‌های پیش‌بینی در جمعیت‌شناسی تا به امروز، بسیاری از نهادهای بین‌المللی از روش‌های جبری[3] در پیش‌بینی جمعیت استفاده کرده‌اند. در این نوع از روش‌ها، از منطق برون‌یابی و با

1 Gompertz
2 uncertainty
3 deterministic

فرض ساده خطی بودن تغییرات مؤلفه‌های جمعیتی، مقادیر در سال‌های آینده پیش‌بینی خواهد شد (Box & Jenkins, 1976). سپس، با استفاده از سناریوهای مختلف، حد بالا، پایین و متوسط، سعی می‌شود تا به نوعی، هرچند ساده، عدم‌قطعیت این پیش‌بینی‌ها وارد مدل شود (Mzzuco & Kielman, 2020).

چنین تصویر ساده‌ای از عدم‌قطعیت ذاتی پیش‌بینی، بعدها به مقصد مهمی برای مطالعات در پیش‌بینی جمعیت به‌طور عام و پیش‌بینی مرگ‌ومیر به‌طور خاص تبدیل شد. عمده روش‌هایی که در این زمینه ایجاد شدند را می‌توان به روش‌های پارامتریک و یا بسط همان روش‌های برون‌یابی سنتی تقسیم‌بندی کرد. برخلاف روش‌های پارامتریک که الگوی تغییرات سنی مرگ را از قبل مشخص می‌کند، روش‌های مبتنی بر برون‌یابی الگوهای سنی را براساس داده‌های موجود تعیین می‌کند (Booth &Tickle, 2008). چنین مزیت نسبی این مدل در مقایسه با سایر مدل‌ها منجر به آن شد که تمرکز پژوهشگران بیشتر بر روش‌های برون‌یابی برای پیش‌بینی امید زندگی و مرگ‌ومیر باشد. بسط این مدل‌ها در نهایت در دهه ۱۹۹۰ منجر به ایجاد مدل لی–کارتر شد که به‌عنوان یکی از روش‌های مسلط در پیش‌بینی‌های مرگ شناخته می‌شود.

لی و کارتر (۱۹۹۲)، از روش‌های استاندارد برای پیش‌بینی یک سری زمانی تصادفی، همراه با یک مدل ساده برای سطح سن–زمان لگاریتم مرگ‌ومیر، برای مدل‌سازی و پیش‌بینی مرگ‌ومیر استفاده کردند. مدل تصادفی لی-کارتر شامل مدلی از میزان‌های مرگ ویژه‌ی سنی با یک مؤلفه‌ی زمان و یک مؤلفه‌ی سن ثابت و یک مدل سری زمانی میانگین متحرک خود همبسته‌ی یکپارچه از مؤلفه زمان بود. به‌منظور برازش مدل، لی و کارتر از داده‌های آمریکا در بین سال‌های ۸۹–۱۹۰۰ و از روش تجزیه‌ی ماتریس برای مشخص کردن دو مؤلفه سن–زمان و پیش‌بینی مؤلفه‌ی زمان تا سال ۲۰۶۵ استفاده کردند. مدل پیشنهادی آنها در مقایسه با سایر مدل‌ها دارای مزیت‌های بیشتری است. برای مثال، می‌توان به دو عاملی بودن مدل، سن و زمان، و همچنین استفاده از تجزیه ماتریس برای استخراج تغییرات سطح مرگ‌ومیر اشاره کرد (Booth, Tickle and Smith, 2005). هرچند در سال‌های اخیر مدل‌های مختلفی برای پیش‌بینی مرگ‌ومیر پیشنهاد شده است،

(Renshawand & Haberman, 2006; Bongaarts, 2005; Girosi & King, 2008)، اما مدل لی-کارتر همچنان به‌عنوان روش غالب در پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر مطرح است و در بسیاری از مطالعات برای کشورهای مختلف مورد استفاده و آزمون قرار گرفته است (کمیجانی و همکاران، ۱۳۹۲؛ Zilil, Mardiyati and Lestari, 2018; Russolillo & Haberman, 2005; Wang, 2007).

با گسترش و غلبه روش پیشنهادی لی و کارتر نسبت به سایر روش‌ها، محدودیت‌های آن نیز مورد توجه قرار گرفت؛ در نتیجه توسعه این روش برای غلبه بر محدودیت‌ها به همراه رویکردهای جایگزین ارائه شد. در شکل اصلی مدل، پارامترها با استفاده از رگرسیون حداقل مربعات (OLS) و تجزیه‌ی مقادیر منفرد[1] تخمین زده می‌شود. یکی از اشکالات رگرسیون حداقل مربعات این است که مقادیر خطا در آن دارای هم‌واریانسی[2] و توزیع نرمال هستند، که یک فرض غیرواقعی برای مرگ‌ومیر انسانی قلمداد می‌شود (Alho, 2008). همچنین به‌عنوان نقص دیگر این مدل، لگاریتم میزان‌های مرکزی مرگ‌ومیر، در سنین بالا نسبت به سنین پایین‌تر به دلیل تعداد کمتر مرگ، دارای تغییرات بیشتری است. برای غلبه به این محدودیت‌ها، بروهنس و همکاران (۲۰۰۲)، مدل لی-کارتر را با استفاده از توزیع پواسون برآورد کردند که نسبت به روش‌های سنتی، فرض واقع‌گرایانه‌تری برای مرگ‌ومیر انسانی ارائه می‌دهد. دومین محدودیت اصلی مدل لی-کارتر، فرض بهبود میزان ثابت مرگ‌ومیر ویژه‌ی سنی در طول زمان است. این فرض برای کشورهایی با مرگ‌ومیر پایین در طی دهه‌های اخیر فرض نادرستی بوده؛ چرا که از بهبود میزان‌های مرگ‌ومیر در سنین نوزادی و خردسالی کاسته می‌شود و افزایش امید زندگی بیشتر متاثر از سنین بالاتر است. بنابر چنین فرضی، این مدل تمایل به کم برآوردی امید زندگی دارد (Lee & Miller, 2001). برای رفع این مشکل، لی و همکاران (۲۰۱۳) چرخش ماتریس پارامتر سنی مدل را برای پیش‌بینی‌های بلندمدت پیشنهاد کردند. چنین چرخشی، کاهش بهبود امید زندگی در سنین خردسالی و افزایش آن در سنین بزرگسالی را وارد مدل می‌کند

1 singular value decomposition
2 homoskedastic

(Bassellini, 2020). به‌عنوان محدودیتی دیگر، مدل لی و کارتر، جداول عمر را معمولاً به صورت نامنظمی برآورد و پیش‌بینی می‌کند، که با درجه‌ی بالایی از ناهمواری در الگوهای سنی مرگ‌ومیر همراه است. چنین اشکالی نیز به نوع تخمین پارامتر مربوط به سن در این مدل مربوط می‌شود. برای فائق آمدن بر این محدودیت، تکنیک‌های هموارسازی در چارچوب مدل لی-کارتر به‌کار گرفته شد. رنشاو و هابرمن (۲۰۰۶)، هموارسازی سری‌های برآورد شده را برای پارامترهای مربوط به زمان و سن با استفاده از روش‌های پارامتریک و ناپارامتریک پیشنهاد کرده‌اند. هایندمن و اولا (۲۰۰۷) و رامسی و سیلورمن (۲۰۰۵) با استفاده از رویکرد داده‌های عملکردی، اقدام به هموارسازی داده‌های مشاهده شده کردند. همچنین، چادو و همکاران (۲۰۰۵) و کوری (۲۰۱۳) برآورد پارامترهای مدل لی و کارتر با استفاده از تابع حداکثر درست‌نمایی تاوانیده[1] را پیشنهاد کردند که منجر به هموارسازی پارامترهای برآورد شده و پیش‌بینی منظم الگوهای سنی می‌شد. علاوه بر مطالعات مذکور، مدل لی-کارتر و توسعه آن در بسیاری از تحقیقات مختلف مورد بررسی و آزمون قرار گرفته است(Raftery et al, 2013; Girosi & King, 2007; Reichmuth & Sarferaz, 2008; De Jong & Tickle, 2006).

بنابر آنچه که در بالا گفته شد، آنچه که موجب برتری و توسعه روش لی-کارتر در مقایسه با سایر روش‌ها شده است، انتقال مهمی از روش‌های جبری به روش‌های آماری و رویکردهای مبتنی بر احتمالات و همچنین امکان توسعه مدل به روش‌های مختلف بود که به خوبی در این روش به کار گرفته شد. علاوه بر چنین تغییر پارادایمی، توسعه روش‌های مبتنی بر احتمالات به‌ویژه از بعد از دهه ۱۹۸۰ مبتنی بر دو اشکال روشی مهم بود: نخست عدم‌قطعیت ذاتی پیش‌بینی‌ها که با ایجاد روش‌های مختلف همچنان به قوت خود باقی بود و دوم آنکه بخش قابل‌توجهی از خطاهای مربوط به پیش‌بینی استفاده از احتمالات در این مدل‌ها را اجتناب‌ناپذیر کرده بود. در همین راستا، بسیاری از روش‌ها و مدل‌های نوظهور ملزم به استفاده از توابع احتمالی در پیش‌بینی‌ها و خطاهای ناشی از آن شدند. چنین تمرکز و تاکیدی بر استفاده از

1 Maximizing a penalized log-likelihood function

قوانین احتمالات در پیش‌بینی‌ها منجر به استفاده و ورود استنباط بیزی[1] در مدل‌سازی‌های مرگ‌ومیر شد. هرچند این روش به سال‌ها قبل و به دوره جنگ جهانی دوم بر می‌گردد، اما از دهه ۱۹۹۰ استفاده از آن در جمعیت‌شناسی با هدف رفع مشکلات موجود در پیش‌بینی‌ها مورد توجه قرار گرفت (Bijak & Bryant, 2016). مهم‌ترین مانعی که در دهه‌های قبل برای استفاده از این روش وجود داشت، یافتن یک روش تحلیلی و آماری برای توزیع‌های مختلف و توابع احتمالی مرتبط با آن بود. در سال‌های بعد، با گسترش استفاده از کامپیوترها، الگوریتم‌های مختلفی برای حل این مشکل پیشنهاد شد و در جمعیت‌شناسی نیز مورد استفاده قرار گرفت. مزیت اصلی و مهم استنباط بیزی در پیش‌بینی‌ها، دقیقا مرتبط با مشکلات اصلی موجود در مدل‌های مرگ‌ومیر یعنی عدم‌قطعیت و خطاهای موجود در پیش‌بینی است. همچنین، در این نوع از مدل‌ها می‌توان نظرات متخصصان مختلف در خصوص آینده مؤلفه‌های جمعیتی را به‌صورت توزیع‌های مختلف وارد مدل کرد و سپس آن را ارزیابی کرد.

مقاله حاضر با تکیه بر خلأهای موجود و نواقص روشی که بدان اشاره شد و با تکیه بر توسعه آمارهای بیزی، سعی در ارائه و معرفی مدلی جدید در پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر دارد. بخش قابل توجهی از مدل‌های جدید در چهارچوب آمارهای بیزی در مرگ‌ومیر مبتنی بر توسعه همان روش لی–کارتر است که با استفاده از قوانین احتمالات در صدد رفع نواقص و اشکالات روش‌های سنتی است. تکیه اصلی مقاله بر شناساندن استنباط بیزی و الگوریتم‌های مرتبط با آن در مدل‌سازی‌های مرگ‌ومیر است. همچنین سعی شده است تا کدهای مربوط به این مدل‌سازی‌ها در برنامه R نوشته و در دسترس عموم نیز قرار بگیرد.

روش و داده‌های تحقیق

روش تحقیق حاضر از نوع تحلیل ثانویه داده‌های موجود است. به‌منظور ارزیابی مدل سعی شده است تا از اطلاعات یک کشور توسعه‌یافته که از نظام ثبتی نسبتا خوبی برخوردار است، استفاده

---

1 Bayesian inference

شود. بنابراین، داده‌های مورد استفاده میزان‌های مرگ‌ومیر ویژه سنی مردان کشور فرانسه است. منبع داده‌های این مقاله برگرفته از پایگاه داده مرگ‌ومیر است[1] و از میزان‌های مرگ‌ومیر در سال‌های ۱۹۵۹ تا ۱۹۸۹ برای برآورد و از سال ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۹ جهت پیش‌بینی و ارزیابی مدل استفاده شده است.

همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، بخش قابل توجهی از روش‌های جدیدی که در مدل‌سازی مرگ‌ومیر توسعه داده شده‌اند مبتنی بر همان روش لی–کارتر است. در مطالعه حاضر نیز، اساس مدل پیش‌بینی مبتنی بر مدل تصادفی لی–کارتر است با این تفاوت که پارامترها از طریق آمار بیزی تخمین زده خواهند شد.

مدل لی–کارتر

براساس مدل پیشنهادی لی و کارتر، برای هر یک از گروه‌های سنی $x_1, x_2, \dots, x_k$ در زمان t، لگاریتم میزان‌های مرگ ویژه سنی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (Lee, 2012) :

$$\ln m_t = a + \beta k_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \mathcal{N}\ (0, \Sigma)$$

که در آن $\ln m_t = (\ln m_{x_1}, \ln m_{x_2}, \dots, \ln m_{x_k})'$ یک بردار1 × k از لگاریتم میزان‌های مرگ برای گروه‌های سنی x_1 تا x_k در زمان t است. همچنین، $\alpha = (\alpha_{x_1}, \alpha_{x_2}, \dots, \alpha_{x_k})'$ و $\beta = (\beta_{x_1}, \beta_{x_2}, \dots, \beta_{x_k})'$ بردارهای ویژه سن و پارامترهای ثابت در طول زمان است و $\kappa = \{\kappa_t : t \in T\}$ پارامتر متغیر مدل و شاخص مرگ‌ومیر است. از آنجایی در سمت راست معادله لی–کارتر هیچ‌گونه متغیر توضیحی وجود ندارد برازش مدل با استفاده از روش‌های رگرسیونی امکان‌پذیر نیست. بنابراین برای یافتن یک مجموعه پاسخ یکتا برای هر سن، پارامترهای مدل به کمک دو قید زیر استاندارد می‌شوند:

$$\sum_x \beta_x^2 = 1, \sum_t \kappa_t = 0.$$

1 The human mortality database, http://www.mortality.org

بعد از اعمال دو قید در معادله بالا پارامترهای مدل را می‌توان به‌نحو زیر تفسیر کرد:

α_x: میانگین لگاریتم میزان‌های مرگ در طول زمان.

β_x: الگوی ویژه سنی بهبود در میزان‌های مرگ‌ومیر که حساسیت هر سن را نسبت به تغییرات کلی مرگ‌ومیر را نشان می‌دهد.

κ_x: شاخص الگوی نهایی تغییرات مرگ‌ومیر که در طول زمان متغیر است.

عناصر بردار خطا در معادله لی-کارتر $\varepsilon_t = (\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \dots, \varepsilon_{x_k})'$ در طول زمان ثابت و مستقل از هر سن است. این بدان معنا است که $\sum$ یک ماتریس کواریانس $N \times N$ قطری و ثابت در طول زمان است.

پارامترهای β_x و m_t را می‌توان به‌راحتی با استفاده از تابع حداقل درست‌نمایی[1] برآورد کرد. اما این روش قیدهای اعمال شده در مدل برای رسیدن به یک پاسخ یکتا را ممکن است با مشکل مواجه کند. لی و کارتر پیشنهاد می‌کنند که برای برآورد دو پارامتر مذکور می‌توان از تجزیه مقادیر منفرد (SVD) ماتریس ویژه سنی $\widetilde{m} = BLU'$ استفاده کرد (Girosi & King, 2007). که بر طبق آن β برابر است با ستون اول ماتریس B و برآورد m_t برابر است با $B'\widetilde{m}_t$.

به‌منظور پیش‌بینی میزان‌های مرگ‌ومیر ویژه سنی نیز پارامتر β_x در طول زمان ثابت فرض می‌شود و میزان‌های مرگ‌ومیر براساس مدل‌های سری زمانی پیش‌بینی خواهد شد. بهترین مدل پیشنهادی از سوی لی و کارتر مدل گام تصادفی با رانش[2] برای پیش‌بینی میزان‌های مرگ در نظر گرفته شده است (Girosi & King, 2007):

$$k_t = k_{t-1} + \theta + \xi_t$$
$$\xi_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{rw}^2)$$

1 maximum likelihood
2 random walk with drift

که در آن θ مقدار دریفت می‌باشد که برآورد آن با تابع درست‌نمایی از طریق

$$\hat{\theta} = (k_T - k_1)/(T-1)$$

به‌دست می‌آید که تنها مبتنی به مقادیر اول و آخر m است. برای پیش‌بینی یک و یا دو مقطع زمانی بعدی مقدار دریفت و خطا به میزان مرگ سال قبل و یا دو سال قبل افزوده می‌شود:

$$\begin{aligned} k_t &= k_{t-1} + \theta + \xi_t \\ &= (k_{t-2} + \theta + \xi_{t-1}) + \theta + \xi_t \\ &= k_{t-2} + 2\theta + (\xi_{t-1} + \xi_t) \end{aligned}$$

برای پیش‌بینی مقدار k_t در زمان $T + (\Delta t)$ با در دست داشتن داده‌ها تا زمان T فرآیند مشابهی تکرار می‌شود:

$$\begin{aligned} k_T + (\Delta t) &= k_T + (\Delta t)\theta + \sum_{i=1}^{(\Delta t)} \xi_{T+i-1} \\ &= k_T + (\Delta t)\theta + \sqrt{(\Delta t)}\xi_t \end{aligned}$$

و در نهایت پیش‌بینی نقطه‌ای میزان‌های مرگ‌ومیر برای سال‌های مختلف از طریق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mu_{T+(\Delta t)} &= m + \beta k_T + (\Delta t) \\ &= m + \beta[k_T + \Delta t]\theta. \end{aligned}$$

مدل بیزین

تفاوت اصلی و مهم آمارهای بیزی با آمارهای کلاسیک و فراوانی‌گرا[1] در نوع برآورد پارامترهای یک مدل آماری است. در آمار کلاسیک پارامتر یک مدل به‌عنوان یک کمیت نامعلوم و ثابت در

1 frequentist

نظر گرفته می‌شود؛ درحالی‌که در مدل بیزین این مقدار به‌عنوان یک متغیر تصادفی شناخته می‌شود که از یک توزیع احتمال خاص پیروی می‌کند. در آمار سنتی، خانواده‌ای از مدل‌های مختلف در برآوردها در نظر گرفته می‌شود، $P = \{p_\theta : \theta \in \Theta\}$، که شامل یک مدل حقیقی است، p_0، و Θ فضای یک پارامتر مشخص است. بنابراین، می‌توان گفت که مدل دارای پاسخ یکتا است اگر و تنها اگر رابطه $\Theta \longmapsto p$ برای هر عضو از $\theta \in \Theta$ برقرار باشد. درحالی‌که در مدل بیزین، یک پاسخ یکتا و حقیقی برای یک پارامتر مشخص وجود ندارد. در عوض، تمام فضای پارامتری Θ با استفاده از توزیع‌های احتمال مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

براساس آمار کلاسیک، ابتدا یک مدل آماری برای یک مجموعه از داده‌های مشاهده شده، Y= y، با توجه به یک بردار نامشخص از پارامتر، θ، در نظر گرفته می‌شود:

$$f(Y|\theta)$$

علاوه بر توزیع احتمال فوق، در آمار بیزی پارامتر θ به‌عنوان یک متغیر تصادفی با توزیع $\pi(\theta|\eta)$ در نظر گرفته می‌شود. این توزیع، به‌عنوان توزیع پیشین[1] پارامتر θ شناخته می‌شود؛ چرا که بیانگر توزیع احتمال این پارامتر قبل از مشاهده هرگونه داده‌ای است. همچنین توزیع احتمال پارامتر θ دارای بردار مخصوص به خود از فضای پارامتری η است که به آن ابرپارامتر[2] می‌گویند. در نهایت با شرط در دست داشتن یک مجموعه داده مشخص توزیع احتمال پارامتر θ را می‌توان براساس مدل بیزین نوشت (Kan, 2012):

$$\pi(\theta|\eta) = \frac{f(y,\theta)}{f(y)} = \frac{f(y,\theta)}{\int f(y,\theta')d\theta'} = \frac{f(y,\theta)\pi(\theta)}{\int f(y|\theta')\,\pi(\theta')d\theta'}$$

1 prior distribution
2 hyperparameters

توزیع فوق نشان‌دهنده توزیع احتمال پارامتر θ بعد از مشاهده داده است که به‌عنوان توزیع پسین[1] شناخته می‌شود. بنابر معادله فوق، هر نوع مدل آماری را با برای مثلا سه پارامتر می‌توان براساس مدل بیزین برای توزیع پسین بدین صورت نوشت:

$$p(\theta|m) = \frac{p(m|\theta)\,p(\theta)}{\iiint p(m|\theta)\ p(\theta)d\theta}$$

که در آن مقدار θ نشان‌دهنده پارامترهای مدل است و مخرج کسر معادله نیز بیانگر تابع چگالی احتمال برای تمامی پارامترها است. مشکل اساسی معادله فوق، برای یک مدل آماری، انتگرال گیری از تمامی مقادیر ممکن پارامتر است. بنابراین، انتگرال‌گیری و یافتن تابع توزیع احتمال توأم با چنین ابعاد زیادی از همه مقادیر ممکن یک پارامتر عملا غیرممکن است. برای حل این مشکل از الگوریتم‌های زنجیره مارکوف مونت‌کارلو *(MCMC)*[2] برای نمونه‌گیری از پارامترها استفاده می‌شود. در این مطالعه از بین الگوریتم‌های مختلف انتگرال‌گیری زنجیره مارکوف مونت‌کارلو از الگوریتم نمونه‌گیری گیبز[3] برای یافتن توزیع احتمال توام پارامترهای مدل لی و کارتر استفاده شده است[4]. نسبت به سایر الگوریتم‌ها، نمونه‌گیری گیبز دارایی برتری‌هایی همچون ساده بودن و مستقل بودن توالی‌های زنجیره مارکوف از مقدار اولیه هر پارامتر است (Lee, 2012). در این روش اگر توزیع $p(x)$ دارای n بعد باشد، برای هر زنجیره از نمونه‌گیری نیاز به n مقدار توزیع احتمال شرطی است. برای مثال، برای i امین تکرار، x_i از طریق $p(x_i|x_{-i})$ بدست می‌آید که در آن تمام مؤلفه‌های x به جز x_i ثابت می‌مانند.

1 posterior distribution
2 Monte Carlo Markov Chain
3 Gibbs sampling
٤ برای اطلاعات بیشتر در خصوص الگوریتم زنجیره مارکوف مونت کارلو رجوع شود به برایانت و ژانگ (۲۰۱۸).

به‌طور کلی، فرآیندهای الگوریتم نمونه‌گیری گیبز به شکل زیر است:

۱–مقدار دهی اولیه پارامتر: $x^0 \sim p(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ که در آن $p(x_0) > 0$ است.

۲–با ثابت نگه داشتن مقادیر پارامترهای دیگر و از طریق توزیع احتمال شرطی تک‌متغیره مقدار بعدی هر پارامتر برآورد می‌شود:

$$x_1^{(1)} \sim p(x_1 | x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$
$$x_2^{(1)} \sim p(x_2 | x_1^{(1)}, x_3^{(0)} \dots, x_n^{(0)})$$
$$\dots$$
$$x_n^{(1)} \sim p(x_n | x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \dots, x_{n-1}^{(0)})$$

۳–در مرحله آخر مقدار $x^1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ذخیره شده و سپس مراحل ۲ و ۳ برای هر تعداد مورد نظر تکرار خواهند شد[1].

با توجه به مقدماتی که در بالا گفته شد، برای برآورد و پیش‌بینی مرگ‌ومیر از طریق مدل بیزین می‌توان مدل لی–کارتر را به‌صورت مدل فضا–حالت[2] مجددا بازنویسی کرد (Pedroza, 2002):

$$y_t = a + \beta k_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N_p(0, \sigma_\varepsilon^2 I),$$
$$k_t = k_{t-1} + \theta + \omega_t \quad \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2)$$

معادله اول برای y_t بردار فضا و معادله دوم برای k_t را بردار حالت می‌نامند. مزیت مهم تبدیل معادله لی–کارتر به مدل فضا–حالت برآورد همه پارامترهای مختلف مدل به‌صورت همزمان است که امکان برآورد خطا را به‌صورت سیستماتیک فراهم می‌کند. همچنین به‌منظور برآورد تابع توزیع احتمال توأم برای هر گروه سنی در هر زمان مشخص از توزیع نرمال چندمتغیره استفاده شده است. با این حال می‌توان از هر نوع توزیع دیگری نیز استفاده کرد. برای قابل مقایسه بودن مدل بیزین با مدل اصلی لی–کارتر نیز دو قید $\sum_x \beta_x^2 = 1$ و $\sum_t \kappa_t = 0$

۱ برای اطلاعات بیشتر در مورد نمونه‌گیری گیبز رجوع شود به کورو (۲۰۱۳).

2 state-space

برای رسیدن به یک مجموعه پاسخ یکتا اعمال می‌شود. در ادامه از نمونه‌گیری گیبز برای برآورد و پیش‌بینی میزان‌های مرگ‌ومیر ویژه سنی و تخمین پارامترها استفاده می‌شود.

قبل از اجرای الگوریتم گیبز برای استخراج توزیع پسین هر پارامتر و قابل مقایسه بودن مدل با مدل اصلی لی–کارتر، ابتدا توزیع‌های پیشین برای هر پارامتر به‌صورت توزیع‌های پیشین اولیه[1] در نظر گرفته می‌شود:

$$p(\alpha,\beta,\theta) \propto 1$$
$$p(\sigma_\varepsilon^2) \propto \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}$$
$$p(\sigma_\omega^2) \propto \frac{1}{\sigma_\omega^2}$$

مقدار اولیه توزیع پیشین برای k_0 به‌صورت $N(a_0,Q_0)$ مشخص می‌شود که براساس مطالعه پدروزا عدد ۵ و ۱۰ به‌عنوان مقدار اولیه توزیع پیشین به ترتیب برای a_0 و Q_0 اعمال شده است. در ادامه اجرای الگوریتم گیبز برای برآورد میزان‌های مرگ در دو بخش انجام می‌شود: ابتدا هر یک از پارامترهای $\sigma_\omega^2,\sigma_\varepsilon^2,\alpha,\beta,\theta,$ با فرض ثابت بودن سایر پارامترها استخراج می‌شود و سپس بردار حالت،k از طریق فیلتر کالمن[2] شبیه‌سازی می‌شود (Pedroza, 2006). روش کار چنین است:

۱– اجرای فیلتر کالمن:

$$v_t = y_t - \alpha - \beta a_{t,}$$
$$Q_t = \beta R_t \beta' + \sigma_\varepsilon^2 I,$$
$$K_t = R_t \beta'^{Q_t^{-1}},$$
$$a_{t+1} = a_t + \theta + K_t v_t,$$
$$R_{t+1} = R_t(1 - K_t\beta) + \sigma_\omega^2$$

بعد از ذخیره مقادیر a_t،R_t و Q_t نمونه‌گیری از بردار حالت به‌صورت زیر انجام می‌شود:

1 noninformative prior distributions
2 Kalman filter

الف: نمونه‌گیری k_n از طریق $(k_n|Y^n) \sim N(a_n, Q_n)$ و سپس

ب: برای هر $t = n-1, n-2, \ldots 1, 0$ مقدار k_t از طریق $p(k_t|k_{t+1}, Y^n)$ به‌دست می‌آید که توزیع شرطی معادله ب برابر است با :

$$(k_t|k_{t+1}, Y^n) \sim N(h_t, H_t)$$

که براساس آن روابط زیر برقرار است:

$$h_t = a_t + B_t(k_{t+1} - a_{t+1}),$$
$$H_t = Q_t - B_t R_{t+1} B_t',$$
$$B_t = Q_t R_{t+1}^{-1}$$

۲-برآورد σ_ε^2 از طریق:

$$\sigma_\varepsilon^2 | Y^n, k, \alpha, \beta \sim Inv - Gamma\left(\frac{pn}{2}, \frac{\sum_i \sum_t (y_{it} - a_i - \beta_i k_t)^2}{2}\right)$$

۳-برآورد α و β از طریق رگرسیون y_i بر مقدار k برای هر گروه سنی. اگر $X = (1, k)$ که در آن 1 برابر است با یک بردار $n \times 1$ و k بردار مقادیر k_t باشد توزیع شرطی پارامترهای a_i و β_i برای هر گروه سنی برابر است با:

$$(a_i, \beta_i) | Y^n, k, \sigma_\varepsilon^2 \sim N((X'X)^{-1} X'y, \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1})$$

٤-برآورد θ از طریق:

$$\theta | k, k_0, \sigma_\omega^2 \sim N\left(\frac{k_n - k_0}{n}, \frac{\sigma_\omega^2}{n}\right)$$

۵-برآورد σ_ω^2 از طریق:

$$\sigma_\omega^2 | k, k_0, \theta \sim Inv - Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{\sum_{t=1}^{n} (k_t - k_{t-1} - \theta)^2}{2}\right)$$

به‌منظور برآورد میزان‌های مرگ مراحل ۱ تا ۵ تکرار می‌شود. برای پیش‌بینی میزان‌های مرگ نیز می‌توان توزیع پسین آن را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$p(y_{n+1}|Y^n) = \int p(y_{n+1}|\phi, Y^n)p(\phi|Y^n)d\phi$$
$$= \int p(y_{n+1}|\phi)p(\phi|Y^n)d\phi$$

که در آن ϕ نماینده تمام پارامترهای مدل است. معادله فوق را می‌توان هم از طریق روش‌های تحلیلی و هم از طریق شبیه‌سازی حل کرد. در این مطالعه از طریق نمونه‌گیری توزیع‌های شرطی $p(\phi|Y^n)$ و $p(y_{n+1}|\phi)$ استفاده شده است. بنابراین از طریق نمونه‌گیری گیبز توزیع پسین پیش‌بینی برای مدل فضا–حالت به‌صورت زیر بدست می‌آید:

۱–برآورد k_{t+1} از طریق:

$$k_{n+1} \sim N(k_n + \theta, \sigma_\omega^2)$$

۲– برآورد y_{t+1} از طریق:

$$y_{t+1} \sim N(\alpha + \beta k_{n+1}, \sigma_\omega^2 I)$$

در نهایت نیز دو توزیع پسین فوق برای هر تعداد سال مشخص از پیش‌بینی تکرار می‌شود. برای تخمین نهایی هر پارامتر در مدل بیزین نیز از میانگین زنجیره‌های متوالی برای هر پارامتر استفاده می‌شود.

یافته‌ها

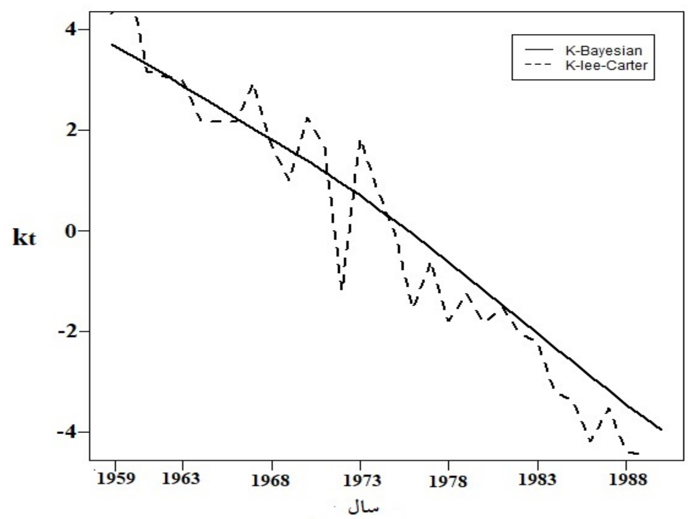
بخش قابل‌توجهی از دقت مدل‌ها مبتنی بر تخمین پارامترهای آن مدل است. همان‌طور که پیش‌تر نیز گفته شد تفاوت اساسی آمارهای بیزی و آمارهای سنتی مبتنی بر نوع تخمین یک پارامتر است. در مدل بیزین با در نظر گرفتن تمام فضای یک پارامتر تمامی مقادیر ممکن در تخمین نهایی در نظر گرفته می‌شود. در حالی که در آمار سنتی و روش اصلی لی–کارتر مقدار پارامتر به‌عنوان یک مقدار واحد و نامعلوم در نظر گرفته می‌شود. مقادیر عددی پارامترهای تخمین زده شده از دو مدل اصلی لی–کارتر و مدل بیزین در جدول ۱ آمده است. درمورد تخمین پارامتر ویژه سنی a_x، رویکرد بیزین و تجزیهٔ مقادیر منفرد در مدل اصلی لی–کارتر تقریبا مقادیر یکسانی برای گروه‌های سنی مختلف ایجاد کرده است، اما بیشترین اختلاف بین این دو رویکرد در گروه‌های سنی ۳۹–۳۵ و ٦٤–٦٠ مشاهده می‌شود. همچنین، درمورد تخمین پارامتر β، هر دو رویکرد تقریبا مقادیر عددی

مشابهی را ارائه می‌دهند و بیشترین اختلاف بین این دو روش در گروه‌های سنی ۱۵–۱۹ و ۲۵–۲۹ سال مشاهده می‌شود. مقادیر تخمین زده شدهβ، برای گروه‌های سنی جوان‌تر بیشتر از مقادیر آن برای گروه‌های سنی بالاتر است، این امر نشان‌دهنده این است که گروه‌های سنی پایین، نسبت به گروه‌های سنی بالاتر، کاهش بیشتری را در مرگ‌ومیر تجربه کرده‌اند و تاثیر نسبتا بیشتری را از تغییرات کلی مرگ‌ومیر در هر سال می‌پذیرند.

جدول ۱: برآورد پارامترهای α وβ برای مدل‌های لی-کارتر و بیزین

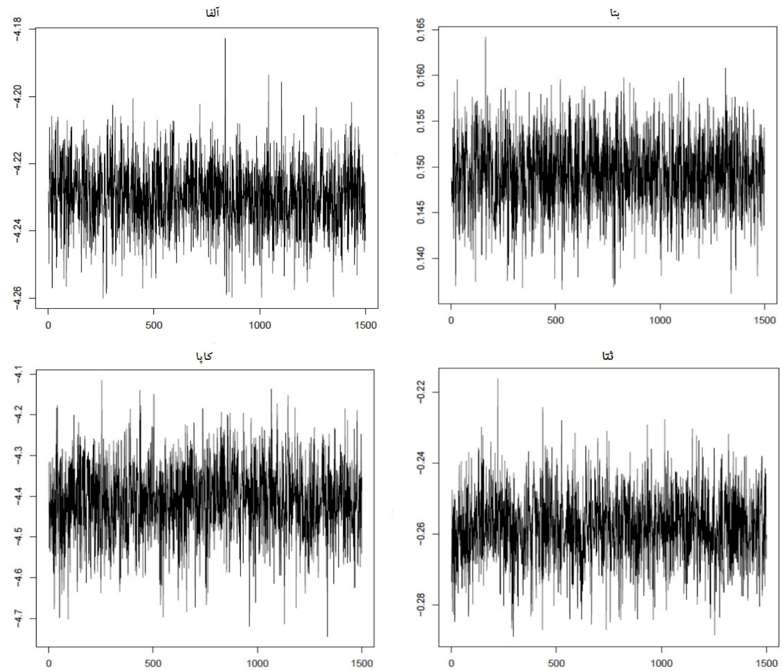
	α		β	
گروه سنی	**لی-کارتر**	**بیزین**	**لی-کارتر**	**بیزین**
صفر ساله	-٤/٢٢٩٠	-٤/٢٢٣٦٣	٠/١٤٧٠٨٢	٠/١٤٢٦٠
١–٤	-٧/٢٢٥٠	-٧/٢٤٦٦٣	٠/١١٢٤٣٨	٠/١٢٦٠٩
٥–٩	-٧/٩٩٨٠	-٧/٩٦٦٨٧	٠/٠٦٨٨٢٦	٠/٠٦٢٢٠
١٠–١٤	-٨/٠٧١٠	-٨/٠٦٦٤٨	٠/٠٥١٨٤٤	٠/٠٥٣١٦
١٥–١٩	-٨/١٠٦٠	-٧/١١١١٢	٠/٠١٧٢٤٢	٠/٠٠٠٧٢
٢٠–٢٤	-٦/٧٩٦٦٤	-٦/٧٦٥٢٣	٠/٠٠٢٣١٤	٠/٠٠٥٣٣
٢٥–٢٩	-٦/٧٨٠٢٤	-٦/٧٧٠٥١	٠/٠٢٢٦٣٢	٠/٠٤١٠٦
٣٠–٣٤	-٦/٥٨٧١٨	-٦/٥٧٢٩٢	٠/٠٣٤٥١٥	٠/٠٣٢٦٦
٣٥–٣٩	-٦/٢٣٠٦٦	-٦/٢٦٧١٤	٠/٠٣٩٦١٣	٠/٠٤٩٧١
٤٠–٤٤	-٥/٧٩٩٩٩	-٥/٨١٣٠٩	٠/٠٣٦٥٩٢	٠/٠٣٩٨٢
٤٥–٤٩	-٥/٣٥٤٦٢	-٥/٣٧١٦٧	٠/٠٣٤٣٩٢	٠/٠١٨٨٢
٥٠–٥٤	-٤/٩٢٩٦٩	-٤/٩٣٩٤٩	٠/٠٣٢٧٢٩	٠/٠٣٨٨٢
٥٥–٥٩	-٤/٥٣٨٠٢	-٤/٥٦١٧	٠/٠٤٠٢١٢	٠/٠٤٧٥١
٦٠–٦٤	-٤/١٤٧١٩	-٤/١١٢٤٧	٠/٠٤٨٦٨٣	٠/٠٦١٠٨
٦٥–٦٩	-٣/٧٤١٤	-٣/٧٢٣٧٤	٠/٠٥٢٣٤٥	٠/٠٥٥١٦
٧٠–٧٤	-٣/٢٨٤٣٧	-٣/٢٦٦٥٥	٠/٠٥١٦٨٦	٠/٠٥٣١١
٧٥–٧٩	-٢/٧٨٢٣١	-٢/٧٥٤٨٩	٠/٠٤٩١٤٨	٠/٠٥٠١٨
٨٠–٨٤	-٢/٢٦٣١١	-٢/٢٨٨٦١	٠/٠٤٣٦٥٤	٠/٠٢٨٤٧
٨٥–٨٩	-١/٧٧٢٨٦	-١/٧٧٨٨٤	٠/٠٣٧٧٢٧	٠/٠٣٢٥٦
٩٠–٩٤	-١/٣٣٥٤	-١/٣٣٦٠٧	٠/٠٢٩٧١٨	٠/٠٣٢٢٩
٩٥–٩٩	-٠/٩٥١٩٣	-٠/٩٥٠٢٦	٠/٠٢١٦٨١	٠/٠٢٥٨٧
١٠٠–١٠٤	-٠/٦٣٩٩٢	-٠/٦٣٣٢٧	٠/٠١٣٦٨	٠/٠١٧٣٧
١٠٥–١٠٩	-٠/٤٠٤٩	-٠/٤٠٣٩٩	٠/٠٠٧٤١٥	٠/٠١١٦٧

یکی از پارامترهای اساسی در مدل لی–کارتر، پارامتر K_t و یا همان شاخص کلی مرگ‌ومیر است. در میان سه پارامتر اصلی مدل، پارامتر K_t تنها پارامتر متغیر در طول زمان و همچنین تعیین‌کننده تغییرات نهایی مرگ‌ومیر در هر سال است. شکل۱، برآورد K_t با استفاده از روش لی–کارتر و مدل بیزین را نشان می‌دهد. همان‌طور که در نمودار قابل مشاهده است، میانگین توزیع پسین مقدار K_t در مدل بیزین هموارتر از تخمین به‌دست آمده از روش لی–کارتر است. استفاده از فیلتر کالمن و در نظر گرفتن تمامی تغییرات سال‌های قبل و اثر دادن آن در سال بعد موجب چنین تفاوت مهمی بین دو رویکرد بیزین و لی–کارتر شده است. همچنین کاهشی بودن این مقدار نشان‌دهنده روند کاهشی میزان‌های مرگ و بهبود امید زندگی در طول زمان در کشور فرانسه است.



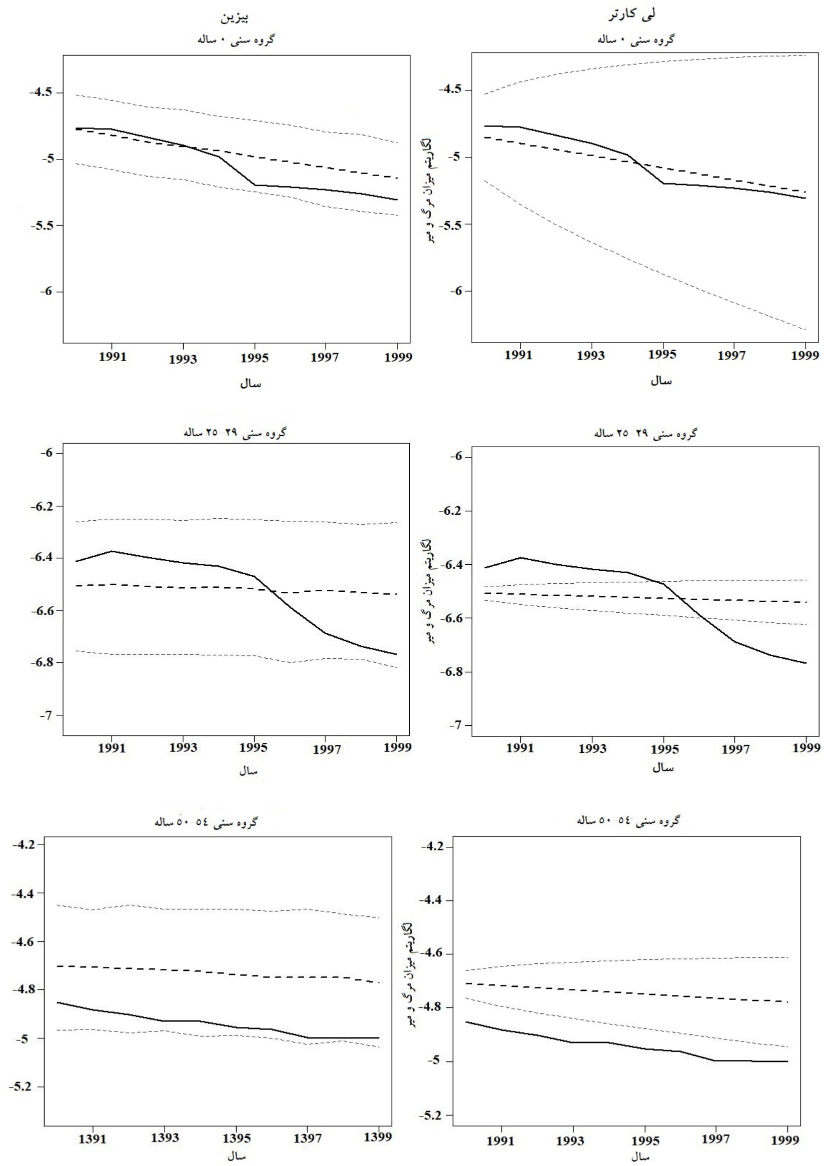
شکل۱: مقدار K_t با استفاده از روش لی کارتر و مدل بیزی

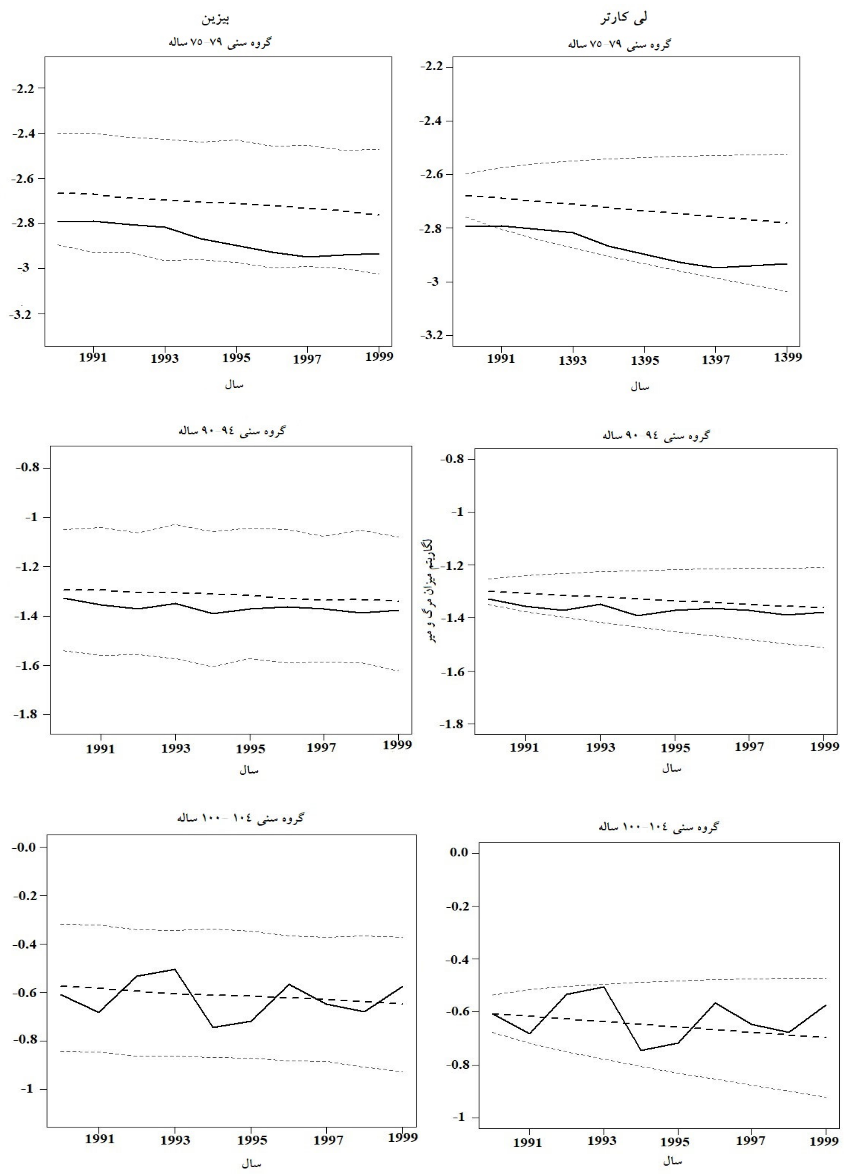
با در دست داشتن مقادیر سه پارامتر فوق و عبارت خطای هر دو مدل می‌توان از طریق اعمال توزیع پیشین برای هر پارامتر توزیع پسین را از طریق مدل بیزین استنتاج و در نهایت پیش‌بینی را برای هر سال مورد نظر انجام داد. با این حال، از آنجایی که تمامی پارامترها از طریق الگوریتم نمونه‌گیری گیبز تخمین زده می‌شوند ارزیابی خروجی این الگوریتم در مدل‌های بیزین بسیار مهم است. شکل ۲ نمودار خروجی الگوریتم گیبز برای چهار پارامتر بتا، آلفا، ثتا و کاپا را نشان می‌دهد.



شکل ۲: نمودار تخمین پارامترهای مدل براساس الگوریتم نمونه‌گیری گیبز

در مدل بیزین نمودار فوق ابزاری مهم برای ارزیابی عملکرد زنجیره مارکوف مونت‌کارلو است. شکل ۲ نشان می‌دهد که آیا زنجیره به توزیع ثابت خود رسیده و یا زنجیره به‌خوبی ترکیب شده است یا خیر. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، برای هر پارامتر ۱۵۰۰ زنجیره از فضای پارامتر تشکیل شده و در نهایت مقادیر هر پارامتر از طریق الگوریتم گیبز انتگرال‌گیری شده است. ملاک درستی این الگوریتم توزیع مقادیر ممکن هر پارامتر حول میانگین است که در شکل ۲ نشان داده شده است. در نهایت از طریق میانگین‌گیری توالی‌های مختلف هر پارامتر مقدار نهایی انتخاب می‌شود. با تخمین تمامی پارامترهای مدل و ارزیابی الگوریتم زنجیره مارکوف مونت‌کارلو می‌توان توزیع پسین هر پارامتر را براساس تخمین پارامترهای موجود برآورد کرد و در نتیجه پیش‌بینی میزان‌های مرگ‌ومیر را انجام داد. شکل ۳، لگاریتم نرخ‌های مرگ‌ومیر پیش‌بینی شده برای برخی از گروه‌های سنی را در هر دو مدل بیزین و مدل اصلی لی–کارتر نشان می‌دهد.

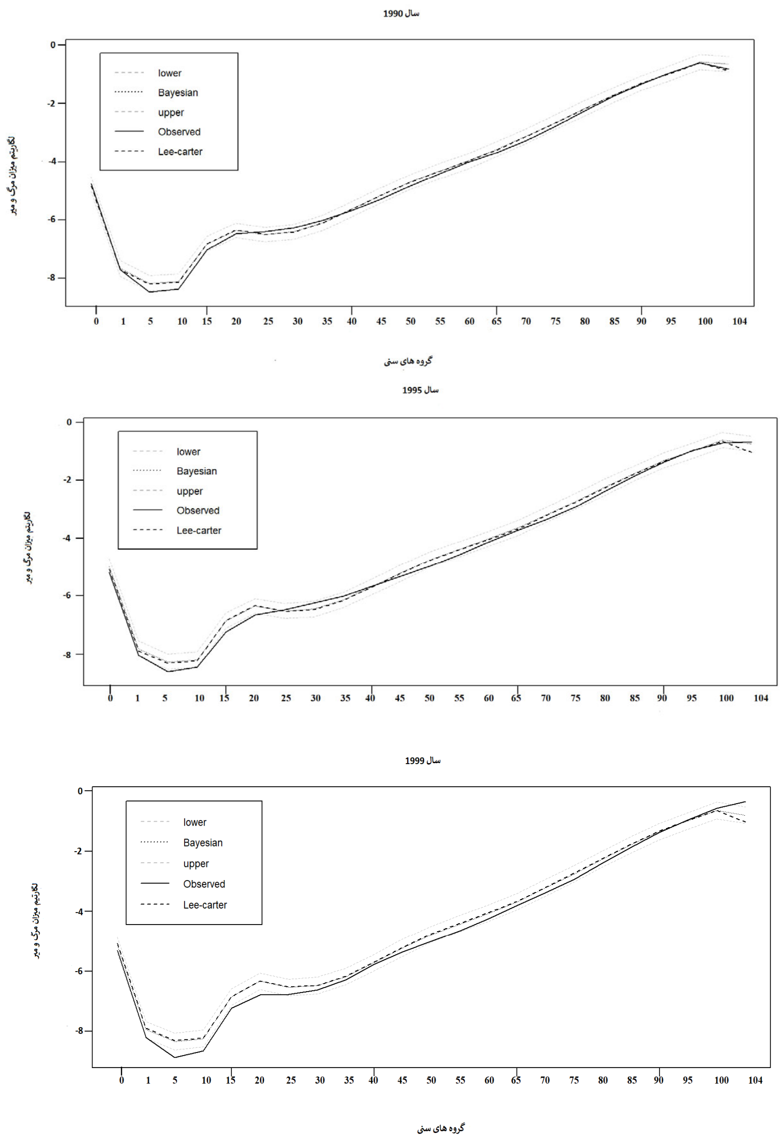

بیزین
لی کارتر
گروه سنی ۰ ساله
گروه سنی ۲۹-۲۵ ساله
گروه سنی ۵۴-۵۰ ساله
لگاریتم میزان مرگ و میر
سال



شکل۳: لگاریتم نرخ‌های مرگ‌ومیر مشاهده شده(خطوط مشکی)، نرخ‌های لگاریتم مرگ‌ومیر پیش‌بینی شده (خط چین مشکی) با فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای مردان فرانسه با مدل لی-کارتر (پنل سمت چپ) و مدل بیزین (پنل سمت راست).

مطابق شکل ۳، نمودارهای سمت راست مربوط به مدل بیزین و نمودارهای سمت چپ مربوط به مدل لی–کارتر می‌باشد. همان‌طور که در نمودارهای بالا قابل مشاهده است، در مدل بیزین و لی–کارتر، برخلاف مدل‌های جبری پیش‌بینی، نرخ‌های مرگ‌ومیر به‌دست آمده برای گروه سنی x در سال t یک فاصلهٔ اطمینان است و نه یک عدد مشخص. مقدار مشاهده شده برای مدل لی–کارتر به ویژه برای گروه‌های سنی، ۲۹–۲۵و ۵۹–۵۵ سال خارج از فاصله اطمینان قرار دارد که نشان‌دهنده عدم پوشش عدم‌قطعیت مدل و خطاهای ناشی از آن در مدل لی–کارتر برای این گروه‌های سنی است. به‌عنوان عامل دیگر، چنین تفاوتی بدان معنا است که پارامترهای K_t و مقدار بتا در مدل لی–کارتر قادر به پوشش تغییرات مرگ‌ومیر و منعکس کردن آن در چنین گروه‌های سنی‌ای نبوده است. نکته مهم و قابل‌توجه در شکل ۳، پوشش کامل مقدار پیش‌بینی شده در مدل بیزین در فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای گروه‌های سنی مذکور در مقایسه با مدل اصلی لی–کارتر است.

در قسمت قبل پیش‌بینی‌های انجام شده و مقادیر مشاهد شده برای گروه‌های سنی در تمام سال مورد تحلیل قرار گرفت. حال می‌توان پیش‌بینی و مقدار مشاهده شده برای یک سال را برای تمام گروه‌های سنی به تصویر کشید. با ترسیم پیش‌بینی‌ها برای تمام گروه‌های سنی در یک سال، می‌توان به‌نحو دیگری دقت و درستی هر دو مدل بیزین و لی–کارتر را برای لگاریتم میزان‌های مرگ مورد بررسی قرار داد. شکل ٤، پیش‌بینی مرگ‌ومیر را برای تمام گروهای سنی در سال‌های اول، میانی و پایانی پیش‌بینی شده نشان می‌دهد. با افزایش سال‌های پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر پیش‌بینی شده مدل بیزین و لی–کارتر به‌ویژه در سنین زیر ۱۵ سال تفاوت بیشتری را نشان می‌دهند. با این وجود، نرخ مرگ در هر دو مدل برای هر سه سال مختلف از پیش‌بینی در محدوده ۹۵ درصد فاصله اطمینان قرار می‌گیرند. نکته قابل‌توجه دیگر در شکل ٤ تفاوت نرخ مرگ مشاهده شده براساس داده‌های ثبتی کشور فرانسه با دو مدل بیزین و لی–کارتر است. بیشترین اختلاف میزان‌های مرگ مشاهده شده با هر دو مدل در سنین زیر ۱۵ سال است و با افزایش سال‌های پیش‌بینی این اختلاف نیز در این سنین بیشتر می‌شود که منعکس کننده تاثیر عدم‌قطعیت پیش‌بینی و خطاهای آن در هر دو مدل مذکور است.



شکل ٤: مقادیر پیش‌بینی شده به روش بیزین و لی کارتر و مقدار مشاهده شده برای سال‌های ۱۹۹۰، ۱۹۹۵ و ۱۹۹۹ در تمام گروه‌های سنی. خط سیاه رنگ مقادیر پیش‌بینی شده است. خط چین‌های کم رنگ فاصله اطمینان ۹۵ درصد را نشان می‌دهند. نقطه چین‌ها مقادیر پیش‌بینی شده به وسیله مدل بیزین و خط چین‌ها مقادیر پیش‌بینی شده به روش لی کارتر را به تصویر می‌کشند.

بحث و نتیجه‌گیری

پیش‌بینی‌های جمعیتی تاریخچه طولانی در مباحث جمعیت‌شناسی دارند. فارغ از ارزش‌های سیاست‌گذاری آن، بخش قابل‌توجهی از حساسیت محققان به این حوزه ناشی از درک بهتر تغییرات مؤلفه‌های تغییر جمعیت و ارائه مدل‌های مختلف در این زمینه است. تلاش‌هایی که در این زمینه در دهه‌های قبل انجام شده است، منجر به توسعه و ارائه مدل‌های مختلفی از مرگ‌ومیر شده است که عمدتا متأثر از روش‌های برون‌یابی و شامل حد بالایی از قضاوت ذهنی محققان در مورد آینده است. پیش‌بینی‌های سازمان ملل و تمامی سازمان‌هایی که اقدام به پیش‌بینی آینده جمعیت کرده‌اند، تا قبل از سال ۲۰۱٤ مبتنی بر چنین روش‌هایی بوده است. همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، چالش مهم و اصلی تمامی این مدل‌ها فائق آمدن بر عدم‌قطعیت ذاتی پیش‌بینی‌ها است که فارغ از استفاده از روش‌های مختلف در تمامی مدل‌سازی‌ها وجود دارد. بنابراین ملاک برتری مدل‌های مرگ‌ومیر را می‌توان به‌راحتی براساس چگونگی مواجه یک مدل خاص با عدم‌قطعیت پیش‌بینی مورد بررسی قرار داد. تحقیقات مختلفی در این زمینه با تکیه بر مشکل عدم‌قطعیت مدل در سال‌های اخیر انجام شده است که شاید بهترین و محبوب‌ترین مثال آن مدل تصادفی لی-کارتر باشد. مدل پیشنهادی لی-کارتر علاوه بر سادگی و دقت آن به‌عنوان گذاری از روش‌های تعیینی به روش‌های مبتنی بر احتمالات محسوب می‌شود. استفاده از قوانین احتمالات و تفسیر سری-زمانی از پارامترهای این مدل خیلی زود این روش را به یک مدل مسلط برای پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر در مجامع علمی تبدیل کرد. از سوی دیگر، توسعه آمارهای بیزی در جمعیت‌شناسی کمک شایانی به دقیق‌تر شدن پیش‌بینی‌ها و مدل‌سازی‌های مرگ‌ومیر کرد.

مقاله حاضر با تکیه بر مدل لی-کارتر و استنباط بیزی با هدف ارائه مدلی جدید در پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر نگاشته شده است. در بخش روش سعی شد تا به ارائه مدل لی-کارتر و آمارهای بیزی پرداخته شود. با این حال، بخش قابل‌توجهی از مفاهیم آمار بیزی و مدل لی-کارتر در قالب توزیع‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. مزیت اساسی آمارهای بیزی در نظر گرفتن تمامی فضای یک پارامتر به‌عنوان مقدار بالقوه برای مقادیر هر پارامتر است. اینکه

تا چه حد تخمین پارامترها از طریق مدل بیزین می‌تواند نسبت به سایر مدل‌ها دقیق‌تر عمل کند خود موضوع جداگانه‌ای برای بررسی است. با این حال، در آمارهای سنتی چنین تخمینی به‌صورت نقطه‌ای برای یک مقدار معلوم ولی نامشخص صورت می‌گیرد، در حالی که در آمارهای بیزی مقدار پارامتر مشخص نبوده و اصولا از طریق نمونه‌گیری تمامی ابعاد یک پارامتر مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین با در نظر گرفتن توزیع‌های احتمال مختلف و اعمال آن بر هر پارامتر مدل امکان تصادفی بودن مدل و تفسیر دقیق‌تر عدم‌قطعیت مدل را فراهم می‌کند. از طرفی دیگر، تخمین پارامترهای مدل که توزیع‌های پسین آن قبل‌تر از طریق استنباط بیزی بدست آمده از طریق الگوریتم زنجیره مارکوف مونت‌کارلو برآورد می‌شود. این الگوریتم دست‌کم دارای دو برتری مهم است: نخست آن‌که، توالی مقادیر ممکن هر پارامتر که از طریق زنجیره مارکوف مدل‌سازی می‌شود، تنها به مقدار قبل از خود وابسته است که در نتیجه امکان تحلیل‌های سری-زمانی دقیق‌تر را فراهم می‌کند. دوم آنکه از طریق روش مونت‌کارلو امکان انتگرال‌گیری از تمامی مقادیر ممکن یک پارامتر با هر بعد مشخص فراهم می‌شود.

در بخش یافته‌های تحقیق مقادیر مختلف پارامترهای مدل لی-کارتر از طریق آمار بیزی تخمین زده شد. تاکید این مقاله بر فرمول‌بندی مدل لی-کارتر در چهارچوب استنباط بیزی مبتنی بر کار پدروزا (۲۰۰٦) بوده است و توزیع نرمال از مقادیر خطای مدل برای مدل بیزین انتخاب شده است. با این حال می‌توان هر توزیع دیگری را مانند توزیع دو جمله‌ای منفی و یا توزیع پواسون برای مدل بیزین انتخاب کرد. فرمول‌بندی مدل لی-کارتر براساس توزیع نرمال دارای یک برتری بسیار مهم است که براساس آن می‌توان از الگوریتم نمونه‌گیری گیبز برای تخمین پارامترهای مدل استفاده کرد. در غیر این صورت الگوریتم‌های پیچیده‌تر زنجیره مارکوف مونت‌کارلو استفاده می‌شود. همچنین توزیع نرمال خطای مدل، امکان فرمول‌بندی مدل لی-کارتر براساس معادله فضا-حالت را نیز فراهم می‌کند. براساس یافته‌های این مقاله، مقدار آلفا و بتا از طریق هر دو روش لی-کارتر و مدل بیزین تفاوت‌های اندکی را نشان می‌دهد. در مورد پارامتر k یا همان شاخص مرگ‌ومیر اما تفاوت‌ها قابل‌توجه است. در روش اصلی لی-کارتر این مقدار از

طریق مدل گام تصادفی با رانش مدل‌سازی می‌شود درحالی‌که، در مدل بیزین از طریق روش فیلتر کالمن برآورد خواهد شد. همان‌طور که در بخش یافته‌ها نشان داده شده است، برآورد شاخص مرگ‌ومیر از طریق فیلتر کالمن نشان‌دهنده روند با ثبات‌تر این مقدار نسبت به مدل لی–کارتر است. چنین روندی ناشی از فرآیند صاف کردن مقدار k در هر سال مشخص و اثر دادن تغییرات سال‌های قبل در مقدار سال جاری است. با در نظر گرفتن تفاوت اندک دو پارامتر آلفا و بتا در هر دو مدل اصلی لی–کارتر و مدل بیزین، تفاوت مهمی که در خروجی پیش‌بینی‌ها بین دو روش وجود دارد ناشی از پارامتر اصلی مدل یعنی مقدارk است. در بخش ارائه پیش‌بینی ده ساله مدل مقایسه دو مدل اصلی لی–کارتر و مدل بیزین نشان‌دهنده فاصله اطمینان گسترده‌تر مدل بیزین نسبت به مدل لی و کارتر است. در مدل بیزین با در نظر گرفتن تمام منابع تغییرات مقادیر پیش‌بینی شده و همچنین تمامی مقادیر ممکن پارامتر منجر به چنین تفاوتی در مقدار فاصله اطمینان پیش‌بینی در گروه‌های سنی مختلف شده است. در راستای هدف اصلی این مقاله، نتایج پیش‌بینی مرگ‌ومیر و مقایسه آن با داده‌های ثبتی کشور فرانسه علاوه بر دقت بهتر مدل بیزین، نشان‌دهنده پوشش بهتر خطاها و عدم‌قطعیت پیش‌بینی در گروه‌های سنی مختلف است. برای مثال در گروه سنی ۲۹–۲۵، ۵۰–۵٤ و ۷۵–۷۹ سال، مقایسه هر دو روش نشان می‌دهد که پیش‌بینی لگارتیم میزان مرگ در این گروه‌های سنی در مدل بیزین بر خلاف مدل لی–کارتر کاملا در محدوده ۹۵ درصد فاصله اطمینان قرار گرفته است.

بنابر آنچه که گفته شد، باور ما این است که با توجه بررسی تمام فضای پارامتری مدل و در نتیجه تخمین دقیق‌تر آن از طریق قوانین احتمالات می‌توان بخش قابل‌توجهی از عدم‌قطعیت پیش‌بینی‌های مرگ‌ومیر را صرف نظر از هر نوع قضاوت ذهنی پوشش داد. علاوه بر این، استفاده استنباط بیزی در مدل‌سازی‌ها و پیش‌بینی‌های جمعیتی بر خلاف آمارهای سنتی امکان اعمال نقطه‌نظر محققان و ذهنیات آنان نسبت به آینده را از طریق توزیع‌های پسین فراهم می‌کند. بسیاری از مدل‌های بیزین که امروزه در پیش‌بینی‌های جمعیتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، این امکان را به محققان می‌دهد که تصورات خود نسبت به آینده را نیز

از طریق توزیع‌های مختلف احتمالی وارد مدل کرده و سپس آن را ارزیابی کنند. با این وجود همچون تمامی مدل‌ها، آمارهای بیزی نیز دارای محدودیت‌های خاص خود است. شاید مهم‌ترین محدودیت در استفاده از این روش‌ها ارائه توزیع‌های پسین دقیق و در نتیجه استنتاج توزیع پسین از طریق آن باشد. در مواردی که داده‌های دقیقی در دسترس نباشد، ارائه توزیع پسین کاملا مبتنی بر درک و نگرش نویسنده می‌باشد. در عین حال اما توسعه الگوریتم‌های مختلف در زمینه نمونه‌گیری توزیع پسین امکان وابستگی کمتر مقادیر برآورد شده از مقادیر اولیه و یا همان توزیع پسین را فراهم کرده است.

منابع

کمیجانی، اکبر، مجید کوششی و لیلی نیاکان (۱۳۹۲). برآورد و پیش‌بینی نرخ مرگ‌ومیر در ایران با استفاده از مدل لی–کارتر، ***پژوهشنامه بیمه***، سال ۲۸، شماره ٤، صص ۲۵–۱.

Alho, J. (2008). Aggregation across countries in stochastic population forecasts. *International Journal of Forecasting*, 24 (3), 343–353.

Basellini, U. (2020). New Approaches in Mortality Modelling and Forecasting , PhD dissertation, Syddansk Universitet.

Bijak, J., & Bryant, J. (2016). Bayesian demography 250 years after Bayes. *Population Studies*, *70*(1), 1-19.

Bongaarts, J. (2005). Long-range trends in adult mortality: Models and projection methods. *Demography*, *42*(1), 23-49.

Booth, H., & Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *Annals of Actuarial Science*, *3*(1-2), 3-43

Booth, H., Tickle, L., & Smith, L. (2005). Evaluation of the variants of the Lee-Carter method of forecasting mortality: A multicountry comparison. *New Zealand Population Review, (Special Issue on Stochastic Population Projections)*, 31(13-37).

Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (Revised Edition). Englewood Cliffs, N.J.7 Prentice Hall.

Bryant, J., & Zhang, J. L. (2018). *Bayesian Demographic Estimation and Forecasting*. Chapman and Hall/CRC.

Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. K. (2002). ″A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables″. *Insurance: Mathematics and Economics*, *31*(3), 373-393.

Coro, G. (2013). *A Lightweight Guide on Gibbs Sampling and JAGS*. Technical Report, Istituto di Scienza e Tecnologie dell Informazione A. Faedo, Pisa, Italy.

Currie, I. D. (2013). Smoothing constrained generalized linear models with an application to the Lee-Carter model. *Statistical Modelling*, *13*(1), 69-93.

Czado, C., Delwarde, A., & Denuit, M. (2005). Bayesian Poisson log-bilinear mortality projections. *Insurance: Mathematics and Economics*, *36*(3), 260-284.

De Jong, P., & Tickle, L. (2006). Extending Lee–Carter mortality forecasting. *Mathematical Population Studies*, *13*(1), 1-18.

Girosi, F., & King, G. (2007). Understanding the Lee-Carter mortality forecasting method. Working paper, Harvard university, USA.

Girosi, F., & King, G. (2008). *Demographic forecasting*. New Jersey .Princeton University Press.

Hyndman, R. J. & Ullah, S. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: A functional data approach. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51 (10), 4942–4956.

Kan, H. (2012). A Bayesian mortality forecasting framework for population and portfolio mortality. Master dissertation in Actuarial Science and Mathematics Finance, Netherlands: University of Economics and Business.

Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American Statistical Association*, *87*(419), 659-671.

Lee, R. & Miller, T. (2001). Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38 (4), 537–549.

Li, N., Lee, R., & Gerland, P. (2013). Extending the Lee-Carter method to model the rotation of age patterns of mortality decline for long-term projections. *Demography*, *50*(6), 2037-2051.

Li, H. (2012). Finding an Optimal Sample Size for the Lee-Carter Model, Master dissertation in sociology, Tilburg University.

Mazzuco, S., & Keilman, N. (2020). *Developments in Demographic Forecasting* (p. 258). Springer Nature.

Pedroza, C. (2002). *Bayesian Hierarchical Time Series Modeling of Mortality Rates*. Harvard University.

Pedroza, C. (2006). A Bayesian forecasting model: predicting US male mortality. *Biostatistics*, *7*(4), 530-550.

Raftery, A. E., Chunn, J. L., Gerland, P., & Ševčíková, H. (2013). Bayesian probabilistic projections of life expectancy for all countries. *Demography*, *50*(3), 777-801.

Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. (2005). *Functional Data Analysis*. Springer-Verlag, 2nd edition.

Renshaw, A. & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 556–570.

Reichmuth, W. H., & Sarferaz, S. (2008). *Bayesian Demographic Modeling and Forecasting: An Application to US Mortality* (No. 2008, 052). SFB 649 Discussion Paper.

Russolillo, M. and Haberman, S. (2005). Lee-Carter mortality forecasting: application to the Italian population. London. Faculty of Actuarial Science and Statistics. Cass Business School.

Wang, J. Z. (2007). *Fitting and Forecastin Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model*. Matematisk Statistik, Stockholms Universitet.

Willekens, F. (2005). Biographic forecasting: bridging the micro-macro gap in population forecasting. *New Zealand population review*, *31*(1), 77-124.

Zili, A. H. A., Mardiyati, S., & Lestari, D. (2018). Forecasting Indonesian mortality rates using the Lee-Carter model and ARIMA method. In *Proceedings of Conference of International Symposium on Current Progress in Mathematics and Sciences.* Indonesia. 2023(1), 020212.